数理解析研究所講究録 1477 巻 2006 年 102-111

最適距離選択について

弘前大学 理工学部　金 正道 (Masamichi KON)
Faculty of Science and Technology, Hirosaki University

概要 本稿では、主成分分析を行った分析結果の事例および数量化 III 類を行った分析結果の事例それぞれについて、人間の感覚に合った距離をよい距離として、いくつかの距離のなかで最適な距離を与える。

1. はじめに 構造記述モデル分析法として主成分分析や数量化 III 類などが知られている。その分析結果に対して、2 点間の距離を定義し、クラスター分析や最適施設配置問題などを用いてさらに分析を進めることがある。そのようなときに、距離をどのように定義するかによって分析結果が異なる場合があり距離の選択が重要になる。問題の種類によって、さまざまな距離が考えられているが、意思決定者の意図に合った解釈ができる距離を選択したり、分析の進め易さ（計算の容易さ）や分析結果の解釈のし易さによって距離選択がなされることが多いようである。どのような距離を用いるのがよいかという基準としてはさまざま考えられるが、ここでは人間の感覚に合ったものをよい距離と考えることにする。ある 2 つの対象（人やもの）があった場合、人の判断によってその 2 つの対象間の距離を定めることは困難であったり、判断する人によってばらつきが大きいことが予想されるが、ある 2 つの対象間の距離は他の 2 つの対象間の距離に比べてどのぐらいかという比を判断することは比較的容易であり、距離を直接定める場合よりは判断する人によってのばらつきも小さいと予想される。ここでは、後者の考え方に従って、対象間の距離を一対比較することによって、一対比較行列を作成し、AHP を適用して得られたウェイトを用いて対象間の距離の比を構成し、その比と距離関数によって測られた対象間の距離の比を比較して、誤差が小さくなるような距離（関数）を人間の感覚に合ったものとし、よい距離とする。対象間の距離を一対比較ではなく、直接対象間の距離を判断した場合、判断ミスによって、人間の感覚に合った距離と異なる誤った選択をしてしまう可能性が大きいと予想されるが、対象間の距離を一対比較して AHP 適用することによってある程度の判断ミスの発見や修正が期待できる。

本稿では、主成分分析を行った分析結果の事例および数量化 III 類を行った分析結果の事例それぞれについて、人間の感覚に合った距離をよい距離として、いくつかの距離のなかで最適な距離を与える。

2. 最適距離選択の事例 1：主成分分析 本節では、主成分分析を行った分析結果の事例について、人間の感覚に合った距離をよい距離として、いくつかの距離のなかで最適な距離を与える。

あるクラスの生徒 10 人（$x_i, i=1,2,\cdots,10$）に、給食の代表的な 4 種類のおかず

1 すき焼き　2 トンカツ　3 八方菜　4 野菜炒め

に対する嗜好をアンケートにより表 1 のような尺度で測定し、アンケートの結果は表 2 のようであった（人工データ）。表 2 のアンケート結果に対して（分散・共分散行列からの）主成分分析を行ったところ表 3 および 4 のような結果が得られ、第二主成分までの累積寄与率は 0.837 であり、第一主成分はおかずが植物性（野菜）か動物性（肉）かを表す（動物性が強ければ主成分得点が高い）と判断し、第二主成分は脂っこいかさっぱりしているかを表す（さっぱりしている方が主成分得点が高い）と判断した。

表 1： アンケートに用いた尺度

評定尺度値	尺　度
9	もっとも好きなおかずに入る
8	いつも食べたい
7	機会があればいつも食べたい
6	好きだからときどき食べたい
5	ときには好きだと思うこともある
4	たまたまあれば食べてみる
3	他になんにもないときに食べる
2	もし強制されれば食べる
1	おそらく食べる気にはならない

表 2： アンケート結果

おかず	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
1	3	2	6	5	1	4	9	8	9	3
2	9	4	3	4	5	2	8	9	5	6
3	5	9	7	1	7	7	6	5	7	9
4	2	5	9	5	8	5	9	1	3	2
平均	4.75	5	6.25	3.75	5.25	4.5	8	5.75	6	5
標準偏差	3.096	2.944	2.500	1.893	3.096	2.082	1.414	3.594	2.582	3.162

表 3： 主成分得点

おかず	(z_1：第一主成分, z_2：第二主成分)
1	$(\ 4.360,\ 1.068) = \boldsymbol{y}_1$
2	$(\ 5.241,\ 7.709) = \boldsymbol{y}_2$
3	$(-3.208, 11.788) = \boldsymbol{y}_3$
4	$(-6.891,\ 1.449) = \boldsymbol{y}_4$
平均	$(-0.125,\ 5.504)$
標準偏差	$(\ 5.893,\ 5.179)$

表 4： 固有値・固有ベクトル

	z_1	z_2
x_1	0.315	0.371
x_2	−0.299	0.450
x_3	−0.379	−0.155
x_4	0.067	−0.340
x_5	−0.426	0.226
x_6	−0.257	0.129
x_7	0.037	−0.262
x_8	0.595	0.146
x_9	0.243	0.036
x_{10}	0.042	0.601
固有値	26.049	20.119

次に、$\boldsymbol{y}_i$ と $\boldsymbol{y}_j$ の間の感覚的な距離（i-j と表す）を一対比較するアンケートによって表 5 のような一対比較行列が得られた。アンケートは 3 人 A,B,C に対して実施したが、表 5-7 はそのうちの 1 人 A に対する結果のみを示している。表 5 の一対比較行列に対して AHP を適用して表 6 のようなウェイトが得られた。ただし、一対比較行列の 2-3 と 2-4 は所謂コピー代替案なので 2-4 を除いた一対比較行列に対して AHP を適用し（整合度は 0.028）、その結果に 2-4 を追加しても順位逆転が起こらないように修正計算した（例えば、[5] 参照）。得られたウェイトは比にのみ意味があるのでそれらの比を感覚的な距離の真の比（理想的な比）と見なして距離関数の選択基準に利用する。表 7 によって与えられる行列の i 行 j 列の値は $\frac{w_i}{w_j}$ の値である。

表 5： 一対比較行列

	1-2	1-3	1-4	2-3	2-4	3-4
1-2	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	1
1-3	5	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	7
1-4	9	1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	5
2-3	9	2	3	1	1	9
2-4	9	2	3	1	1	9
3-4	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

表 6： AHP によって得られたウェイト

	ウェイト
1-2	$0.027 = w_1$
1-3	$0.158 = w_2$
1-4	$0.158 = w_3$
2-3	$0.314 = w_4$
2-4	$0.314 = w_5$
3-4	$0.028 = w_6$

表 7： 感覚的な距離の真の比（理想的な比）

	1-2	1-3	1-4	2-3	2-4	3-4
1-2	1.000	0.173	0.173	0.087	0.087	0.965
1-3	5.783	1.000	1.000	0.503	0.503	5.583
1-4	5.786	1.000	1.000	0.504	0.504	5.585
2-3	11.490	1.987	1.986	1.000	1.000	11.091
2-4	11.490	1.987	1.986	1.000	1.000	11.091
3-4	1.036	0.179	0.179	0.090	0.090	1.000

ここで、$\boldsymbol{y}_i = (y_i^1, y_i^2)$ と $\boldsymbol{y}_j = (y_j^1, y_j^2)$ の間の距離を測る距離関数として次のようなものを考えてみよう[1]。

(1) $$d_p(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{y}_j) = (|y_i^1 - y_j^1|^p + |y_i^2 - y_j^2|^p)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < \infty$$

(2) $$d_\infty(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{y}_j) = \max\{|y_i^1 - y_j^1|, |y_i^2 - y_j^2|\}$$

(3) $$d_B(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{y}_j) = \inf\{\lambda > 0 : \boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{y}_j \in \lambda B\}$$

d_B は [8] において提案されているもので、主成分分析において元のデータを主成分に集約したときに損失した情報を補うように $B \subset \mathbb{R}^2$ は次のように定義される。$r_{ij}, i = 1, 2, \cdots, 10, j = 1, 2$ を z_j の x_i への回帰係数とし、$\boldsymbol{a}_i = (r_{i1}, r_{i2})$ とする。いまの場合は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1 &= (\ \ 1.141,\ \ 1.039), & \boldsymbol{a}_2 &= (-1.198,\ \ 1.394),\\
\boldsymbol{a}_3 &= (-2.106, -0.666), & \boldsymbol{a}_4 &= (\ \ 0.648, -2.544),\\
\boldsymbol{a}_5 &= (-1.545,\ \ 0.631), & \boldsymbol{a}_6 &= (-2.057,\ \ 0.799),\\
\boldsymbol{a}_7 &= (\ \ 0.647, -3.510), & \boldsymbol{a}_8 &= (\ \ 1.600,\ \ 0.303),\\
\boldsymbol{a}_9 &= (\ \ 1.265,\ \ 0.147), & \boldsymbol{a}_{10} &= (\ \ 0.145,\ \ 1.613)
\end{aligned}$$

となる。これらを用いて $\{\pm\boldsymbol{a}_1, \pm\boldsymbol{a}_2, \cdots, \pm\boldsymbol{a}_{10}\}$ の凸包を B と定義する。

いま、d を $d_p, 1 \leq p < \infty$ または d_∞ または d_B のうちの 1 つとする。このとき

$$\begin{aligned}
\widetilde{w}_1 &= d(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2) = d(\boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_1), & \widetilde{w}_2 &= d(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_3) = d(\boldsymbol{y}_3, \boldsymbol{y}_1),\\
\widetilde{w}_3 &= d(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_4) = d(\boldsymbol{y}_4, \boldsymbol{y}_1), & \widetilde{w}_4 &= d(\boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3) = d(\boldsymbol{y}_3, \boldsymbol{y}_2),\\
\widetilde{w}_5 &= d(\boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_4) = d(\boldsymbol{y}_4, \boldsymbol{y}_2), & \widetilde{w}_6 &= d(\boldsymbol{y}_3, \boldsymbol{y}_4) = d(\boldsymbol{y}_4, \boldsymbol{y}_3)
\end{aligned}$$

[1] $\|\cdot\|_p = d_p(\boldsymbol{0}, \cdot), 1 \leq p < \infty$ および $\|\cdot\|_\infty = d_\infty(\boldsymbol{0}, \cdot), \|\cdot\|_B = d_B(\boldsymbol{0}, \cdot)$ としたとき、$\|\cdot\|_p$ は ℓ_p ノルム, $\|\cdot\|_\infty$ はチェビシェフノルム, $\|\cdot\|_B$ は B を単位円としてもつブロックノルムとして知られている。特に、$\|\cdot\|_1$ は直角ノルム, $\|\cdot\|_2$ はユークリッドノルムとしてよく知られている。

とし、d の感覚的な距離からの誤差として次のようなものを考える。

(4) $$E_1(d) = \sum_{i,j} \left(\frac{\widetilde{w}_i}{\widetilde{w}_j} - \frac{w_i}{w_j} \right)^2 = \sum_{i \neq j} \left(\frac{\widetilde{w}_i}{\widetilde{w}_j} - \frac{w_i}{w_j} \right)^2$$

(5) $$E_2(d) = \sum_{i,j} \left(\log \frac{\frac{\widetilde{w}_i}{\widetilde{w}_j}}{\frac{w_i}{w_j}} \right)^2 = 2 \sum_{i<j} \left(\log \frac{\frac{\widetilde{w}_i}{\widetilde{w}_j}}{\frac{w_i}{w_j}} \right)^2$$

(6) $$E_3(d) = \sum_{i,j} \left(\frac{\frac{\widetilde{w}_i}{\widetilde{w}_j} - \frac{w_i}{w_j}}{\frac{w_i}{w_j}} \right)^2 = \sum_{i \neq j} \left(\frac{\frac{\widetilde{w}_i}{\widetilde{w}_j}}{\frac{w_i}{w_j}} - 1 \right)^2$$

ただし、以下で d の誤差を考えるとき、d として $d_p, 1 \leq p < \infty$ または d_∞ または d_B だけでなく、後に定義される $d_{p,\theta}, d_{B,\theta}, d_{p,a,b}, d_{\infty,a,b}, d_{B,a,b}, d_{p,a,b,\theta}, d_{\infty,a,b,\theta}, d_{B,a,b,\theta}$ も同様に考える。次の表 8 は、A,B,C 3 人に対する最適な距離を表している。表 8 において、ABC は、A,B および C の一対比較行列の i 行 j 列の値をそれぞれ a_{ij}, b_{ij} および c_{ij} としたとき、それらの幾何平均 $\sqrt[3]{a_{ij} b_{ij} c_{ij}}$ を i 行 j 列の値とする（平均された）一対比較行列に対して AHP を適用して得られたウェイトを用いた場合を表していて、後述の表 9-11,18-21 も同様である。

表 8: 最適な距離 $d_*, * \in \{p \in \mathbb{R} : 1 \leq p < \infty\} \cup \{\infty, B\}$

	$*$	E_1	$*$	E_2	$*$	E_3
A	B	457.600	B	55.113	1	300.454
B	1	25.935	1	15.633	1	25.340
C	7.072	7.959	6.415	7.244	7.485	9.903
ABC	1	19.229	1	11.446	1	18.912

次に、距離関数として次のようなものを考え、同様の考察を行う。

(7) $$d_{p,\theta}(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{y}_j) = d_p((y_i^1(\theta), y_i^2(\theta)), (y_j^1(\theta), y_j^2(\theta))), \qquad 1 \leq p < \infty,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

(8) $$d_{B,\theta}(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{y}_j) = d_B((y_i^1(\theta), y_i^2(\theta)), (y_j^1(\theta), y_j^2(\theta))), \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

ここで

$$\begin{pmatrix} y_i^1(\theta) & y_i^2(\theta) \\ y_j^1(\theta) & y_j^2(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_i^1 & y_i^2 \\ y_j^1 & y_j^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

である。誤差を最小にするようなパラメータ θ を探索するときのステップ幅は 0.01 とした。以下、本稿において用いられている θ に対しても同様にした。次の表 9 は、A,B,C 3 人に対する最適な距離を表している。

表 9: 最適な距離 $d_{*,\theta}, * \in \{p \in \mathbb{R} : 1 \leq p < \infty\} \cup \{B\}$

	$*$	θ	E_1	$*$	θ	E_2	$*$	θ	E_3
A	B	2.82	391.250	B	2.62	36.681	B	2.62	118.101
B	B	2.61	25.500	1	1.54	15.525	1	1.54	25.115
C	1	0.48	7.446	B	1.92	6.726	1	0.48	9.193
ABC	B	2.62	10.084	B	2.62	5.442	B	2.62	6.686

次に、距離関数として次のようなものを考え、同様の考察を行う。

(9) $$d_{p,a,b}(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{y}_j) = d_p((a y_i^1, b y_i^2), (a y_j^1, b y_j^2)), \qquad 1 \leq p < \infty,\ a, b > 0$$

$$d_{\infty,a,b}(\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{y}_j)=d_\infty((ay_i^1,by_i^2),(ay_j^1,by_j^2)),\qquad a,b>0 \tag{10}$$

$$d_{B,a,b}(\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{y}_j)=d_B((ay_i^1,by_i^2),(ay_j^1,by_j^2)),\qquad a,b>0 \tag{11}$$

このとき、$a,a',b,b',\mu>0$ に対して

$$a'=\mu a,\qquad b'=\mu b$$

ならば

$$d_{p,a',b'}(\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{y}_j)=\mu d_{p,a,b}(\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{y}_j),\quad d_{\infty,a',b'}(\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{y}_j)=\mu d_{\infty,a,b}(\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{y}_j),\quad d_{B,a',b'}(\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{y}_j)=\mu d_{B,a,b}(\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{y}_j)$$

となるので、誤差 $E_k, k=1,2,3$ の定義より各 $k=1,2,3$ に対して

$$E_k(d_{p,a',b'})=E_k(d_{p,a,b}),\quad E_k(d_{\infty,a',b'})=E_k(d_{\infty,a,b}),\quad E_k(d_{B,a',b'})=E_k(d_{B,a,b})$$

となることに注意。これは、後に定義される $d_{p,a,b,\theta}, d_{\infty,a,b,\theta}, d_{B,a,b,\theta}$ に対しても成り立つ。よって、$a,b>0$ は

$$(a,b)=(\cos\eta,\sin\eta),\quad 0<\eta<\frac{\pi}{2}$$

の範囲を考えれば十分である。誤差を最小にするようなパラメータ a,b を探索するとき、η のステップ幅は 0.01 とした。以下、本稿において用いられている a,b に対しても同様にした。次の表 10 は、A,B,C 3 人に対する最適な距離を表している。

表 10: 最適な距離 $d_{*,a,b}, * \in \{p\in\mathbb{R}:1\le p<\infty\}\cup\{\infty,B\}$

	$*$	a	b	E_1	$*$	a	b	E_2	$*$	a	b	E_3
A	B	0.994	0.110	200.234	1245.76	0.976	0.218	17.536	700.671	0.974	0.228	35.195
A					∞	0.976	0.218	17.536	∞	0.974	0.228	35.195
B	1	0.682	0.731	25.905	1	0.718	0.696	15.630	1	0.738	0.674	25.213
C	1167.89	0.598	0.802	6.180	1167.89	0.598	0.802	5.706	1167.89	0.598	0.802	7.183
C	∞	0.598	0.802	6.180	∞	0.598	0.802	5.706	∞	0.598	0.802	7.183
ABC	11.113	0.878	0.479	13.113	700.671	0.896	0.444	6.806	467.063	0.896	0.444	8.636
ABC					∞	0.896	0.444	6.806	∞	0.896	0.444	8.636

さらに、距離関数として次のようなものを考え、同様の考察を行う。

$$d_{p,a,b,\theta}(\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{y}_j)=d_p((ay_i^1(\theta),by_i^2(\theta)),(ay_j^1(\theta),by_j^2(\theta))),\qquad 1\le p<\infty,\ a,b>0,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \tag{12}$$

$$d_{\infty,a,b,\theta}(\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{y}_j)=d_\infty((ay_i^1(\theta),by_i^2(\theta)),(ay_j^1(\theta),by_j^2(\theta))),\qquad a,b>0,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \tag{13}$$

$$d_{B,a,b,\theta}(\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{y}_j)=d_B((ay_i^1(\theta),by_i^2(\theta)),(ay_j^1(\theta),by_j^2(\theta))),\qquad a,b>0,\ 0\le\theta\le\pi \tag{14}$$

次の表 11 は、A,B,C 3 人に対する最適な距離を表している。

表 11: 最適な距離 $d_{*,a,b,\theta}, * \in \{p \in \mathbb{R} : 1 \leq p < \infty\} \cup \{\infty, B\}$

	$*$	a	b	θ	E_1
A	1.095	0.051	0.999	1.30	88.089
B	9967.13	0.590	0.808	0.60	23.967
B	∞	0.590	0.808	0.60	23.967
C	B	0.427	0.904	0.63	5.727
ABC	B	0.820	0.573	2.67	7.897
	$*$	a	b	θ	E_2
A	1.159	0.061	0.998	1.30	7.347
B	9967.13	0.590	0.808	0.60	13.877
B	∞	0.590	0.808	0.60	13.877
C	B	0.418	0.909	0.65	5.178
ABC	B	0.820	0.573	2.67	4.053
	$*$	a	b	θ	E_3
A	1.164	0.061	0.998	1.30	9.523
B	9967.13	0.590	0.808	0.60	21.620
B	∞	0.590	0.808	0.60	21.620
C	B	0.408	0.913	0.65	6.399
ABC	B	0.820	0.573	2.67	4.635

3. 最適距離選択の事例 2：数量化 III 類 本節では、数量化 III 類を行った分析結果の事例について、人間の感覚に合った距離をよい距離として、いくつかの距離のなかで最適な距離を与える。

生涯学習・社会教育に関する調査研究として、青森県在住の成人を対象にアンケートによる家庭教育に関する意識調査が青森県総合社会教育センターによって行われた。この調査は，家庭の教育力を充実するために、県民が家庭教育に関する学習内容や学習活動等に対して、どのような要求課題を持っているかを明らかにし、市町村教育委員会などの各学習提供機関の基礎資料として提出する目的で行われ、調査結果が報告された [1]。ここでは、次の質問項目に対するアンケート結果を用いて、「乳幼児の時期の子どもにとって必要な教育項目」を考える。[7] において、このアンケート結果に数量化 III 類を適用して分析が行われている。

アンケートの質問項目

問 家庭において，お子さんが**乳幼児・小学生・中学生・高校生**の時期に，**もっとも重要だと思われる教育項目**は何ですか．次の中から**最大 3 つまで選び**番号を記入してください．(同じ項目を何回選んでもかまいません)

1 基本的生活習慣（例えば，洗顔，自分で起床，あいさつなど）
2 生活体験（例えば，タオルをしぼる，小さな子の世話，ナイフの使い方など）
3 自然体験（例えば，海や川で遊ぶ，自然観察，登山など）
4 自主性（自分の判断で行動する態度）
5 自制心（感情・欲望などを自分で抑えること）
6 自立心（人に頼らず，独り立ちして自力でやっていこうとする心構え）
7 豊かな情操（美しいものを美しいと感じる心）
8 他人への思いやり
9 道徳感
10 社会的なマナー
11 正義感
12 人間関係づくり
13 職業観
14 性教育
15 その他（具体的にお書きください）
16 わからない

得られたアンケート結果から、反応数が少なかったカテゴリ（回答項目）を除き

1 基本的生活習慣　2 生活体験　3 自然体験　7 豊かな情操

のみを分析対象とした。欠損がある個体を除き、表 12 のようなカテゴリ・データが得られた。表 13 は、表 12 のアンケート結果に数量化 III 類を適用した結果の固有値を示している。ここでは、第 2 位までの固有値を取り上げる。表 14 は、カテゴリスコアを示している。カテゴリスコアは次のように解釈できる。カテ

ゴリ第 1 スコア z_1 の値が小さいほど身心的（情操的）な事に関する学習内容を表し、大きいほど身体的（行動的）な事に関する学習内容を表す。カテゴリ第 2 スコア z_2 の値が小さいほど（場所が）非日常的な事に関する学習内容を表し、大きいほど（場所が）日常的な事に関する学習内容を表す。

表 12: アンケート結果

個体番号	1 生活習慣	2 生活体験	3 自然体験	7 豊かな情操
1	1	0	0	1
2	1	1	1	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
492	1	1	1	0

表 13: 固有値

順位	固有値	寄与率	累積寄与率	相関係数
1	0.357	53.28	53.28	0.598
2	0.176	26.29	79.58	0.420
3	0.137	20.42	100.00	0.370

表 14: カテゴリスコア

カテゴリ番号	(z_1 : 第 1 スコア, z_2 : 第 2 スコア)
1（生活習慣）	$(0.071, 0.315) = \boldsymbol{y}_1$
2（生活体験）	$(1.368, 1.128) = \boldsymbol{y}_2$
3（自然体験）	$(0.343, -1.721) = \boldsymbol{y}_3$
7（豊かな情操）	$(-1.790, 0.414) = \boldsymbol{y}_4$

次に、$\boldsymbol{y}_i$ と $\boldsymbol{y}_j$ の間の感覚的な距離（i-j と表す）を一対比較するアンケートによって表 15 のような一対比較行列が得られた。アンケートは 3 人 A,B,C に対して実施したが、表 15-17 はそのうちの 1 人 A に対する結果のみを示している。表 15 の一対比較行列に対して AHP を適用して（整合度は 0.093）表 16 のようなウェイトが得られた。表 17 によって与えられる行列の i 行 j 列の値は表 7 と同様に $\frac{w_i}{w_j}$ の値である。

表 15: 一対比較行列

	1-2	1-3	1-4	2-3	2-4	3-4
1-2	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1-3	7	1	1	3	5	1
1-4	3	1	1	1	1	$\frac{1}{5}$
2-3	5	$\frac{1}{3}$	1	1	5	$\frac{1}{3}$
2-4	3	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{7}$
3-4	9	1	5	3	7	1

表 16: AHP によって得られたウェイト

	ウェイト
1-2	$0.031 = w_1$
1-3	$0.269 = w_2$
1-4	$0.118 = w_3$
2-3	$0.147 = w_4$
2-4	$0.064 = w_5$
3-4	$0.371 = w_6$

表 17: 感覚的な距離の真の比（理想的な比）

	1-2	1-3	1-4	2-3	2-4	3-4
1-2	1.000	0.116	0.262	0.211	0.488	0.084
1-3	8.644	1.000	2.268	1.822	4.219	0.724
1-4	3.811	0.441	1.000	0.803	1.860	0.319
2-3	4.743	0.549	1.245	1.000	2.315	0.397
2-4	2.049	0.237	0.538	0.432	1.000	0.172
3-4	11.946	1.382	3.134	2.518	5.830	1.000

ここで、$\boldsymbol{y}_i$ と $\boldsymbol{y}_j$ の間の距離を測る距離関数として (1) および (2) によって定義された d_p および d_∞ を考えてみよう。次の表 18 は、A,B,C 3 人に対する最適な距離を表している。

表 18: 最適な距離 $d_*, * \in \{p \in \mathbb{R} : 1 \leq p < \infty\} \cup \{\infty\}$

	*	E_1	*	E_2	*	E_3
A	2.726	221.629	2.372	41.529	2.260	141.204
B	99672.7	23.420	59803.5	15.314	59803.5	28.954
B	∞	23.420	∞	15.314	∞	28.954
C	59803.5	14.766	59803.5	12.377	59803.5	18.877
C	∞	14.766	∞	12.377	∞	18.877
ABC	3.813	12.655	3.965	10.084	3.847	14.795

次に、距離関数として (7) によって定義された $d_{p,\theta}$ を考え、同様の考察を行う。次の表 19 は、A,B,C 3 人に対する最適な距離を表している。

表 19: 最適な距離 $d_{*,\theta}, * \in \{p \in \mathbb{R} : 1 \leq p < \infty\}$

	*	θ	E_1	*	θ	E_2	*	θ	E_3
A	1	0.56	203.611	1	0.56	37.267	1	0.49	115.058
B	311.325	1.52	23.358	1	0.76	15.301	1	0.74	28.878
C	233.455	0.25	13.784	1	0.98	11.987	1	0.98	17.881
ABC	5.301	1.37	12.542	10.206	1.32	9.898	12.850	1.29	14.267

次に、先に考えた距離関数として (9) および (10) によって定義された $d_{p,a,b}$ および $d_{\infty,a,b}$ を考え、同様の考察を行う。次の表 20 は、A,B,C 3 人に対する最適な距離を表している。

表 20: 最適な距離 $d_{*,a,b}, * \in \{p \in \mathbb{R} : 1 \leq p < \infty\} \cup \{\infty\}$

	*	a	b	E_1	*	a	b	E_2	*	a	b	E_3
A	3815.43	0.399	0.917	176.065	3815.44	0.399	0.917	26.980	467.063	0.399	0.917	58.532
A	∞	0.399	0.917	176.065	∞	0.399	0.917	26.980	∞	0.399	0.917	58.532
B	1245.76	0.738	0.674	23.217	1245.76	0.745	0.667	15.085	467.063	0.771	0.637	27.461
B	∞	0.738	0.674	23.217	∞	0.745	0.667	15.085	∞	0.771	0.637	27.461
C	1232.8	0.718	0.696	14.747	19934.4	0.711	0.703	12.387	14947.9	0.711	0.703	18.874
C	∞	0.718	0.696	14.747	∞	0.711	0.703	12.387	∞	0.711	0.703	18.874
ABC	3.889	0.622	0.783	11.568	4.433	0.598	0.802	9.010	4.467	0.598	0.802	12.372

さらに、距離として (12) および (13) によって定義された $d_{p,a,b,\theta}$ および $d_{\infty,a,b,\theta}$ を考え、同様の考察を行う。次の表 21 は、A,B,C 3 人に対する最適な距離を表している。

表 21: 最適な距離 $d_{*,a,b,\theta}, * \in \{p \in \mathbb{R} : 1 \leq p < \infty\} \cup \{\infty\}$

	*	a	b	θ	E_1
A	311.325	0.170	0.985	0.44	25.319
B	1	0.515	0.857	0.79	21.884
C	1	0.909	0.417	0.99	11.679
ABC	∞	0.506	0.862	0.75	9.028
	*	a	b	θ	E_2
A	1089.590	0.190	0.982	0.44	4.477
A	∞	0.190	0.982	0.44	4.477
B	1	0.480	0.877	0.79	14.132
C	1	0.932	0.362	0.98	9.812
ABC	64789.8	0.445	0.896	0.68	5.591
ABC	∞	0.445	0.896	0.68	5.591
	*	a	b	θ	E_3
A	1245.760	0.190	0.982	0.45	5.321
A	∞	0.190	0.982	0.45	5.321
B	1	0.427	0.904	0.81	25.447
C	1	0.929	0.371	1.00	13.553
ABC	64787.2	0.445	0.896	0.68	6.916
ABC	∞	0.445	0.896	0.68	6.916

4. 結論 主成分分析を行った分析結果の事例および数量化 III 類を行った分析結果の事例それぞれについて、人間の感覚に合った距離をよい距離として、いくつかの距離のなかで最適な距離を与えた。人間の感覚の基準として、対象間の距離を一対比較することによって一対比較行列を作成して AHP を適用した結果得られたウェイトを用いて構成した対象間の距離の比を用いた。AHP を適用するとき、整合度がよいとしても対象間の距離を一対比較するときに多少の判断ミスは含まれていると考えられる。そのため、いくつかの距離関数に対する感覚的な距離からの誤差の多少の違いはあまり意味を持たないと考えられる。しかしながら、本稿で扱った 2 つの事例どちらに関しても、通常よく用いられているユークリッド距離 d_2 より感覚的な距離に近い他の距離を与えることができたと言えるだろう。また、距離の回転や拡大・縮小を考慮することによってより感覚的に近い距離を与えることができた。これは、人間の感覚に合った距離を問題にするときに、このような距離選択の必要性および重要性を示唆している。また、今後の課題として次のようなものが考えられる。

- 他の多くの事例に関して同様な考察すること。
- 多くの人の感覚的な距離に合った距離選択はどのようになるか、多くの人の感覚的な距離の一対比較データを集めることによってさらに実験を進めること。
- 他の距離関数も考慮すること。

参考文献

[1] 青森県総合社会教育センター, 家庭の教育力に関する調査報告書, 2002.
(http://alis.net.pref.aomori.jp/)

[2] J. Brimberg and R. F. Love, *Directional bias of the l_p-norm*, European Journal of Operational Research, **67**, 1993, 287-294.

[3] J. J. Fernández, P. Fernández and B. Pelegrin, *Estimating actual distances by norm functions: a comparison between the $l_{k,p,\theta}$-norm and the $l_{b_1,b_2,\theta}$-norm and a study about the selection of the data set*, Computers & Operations Research, **29**, 2002, 609-623.

[4] H. Juel and R. F. Love, *The facility location problem for hyper-rectilinear distances*, IIE Transactions, **17**, 1985, 94-98.

[5] 木下栄蔵, 入門 AHP — 決断と合意形成のテクニック, 日科技連, 2000.

[6] 木下栄蔵, AHP の理論と実際, 日科技連, 2000.

[7] M. Kon, *Public opinion survey on home education: application of location problems with rectilinear norm*, Scientiae Mathematicae Japonicae, **58**, 2003, 99-111.

[8] M. Kon and S. Kushimoto, *Efficient solutions for multicriteria location problems under the block norm II: application to the development of new products*, Scientiae Mathematicae, **1**, 1998, 133-140.

[9] R. F. Love and P. D. Dowling, *Optimal weighted l_p norm parameters for facilities layout distance characterizations*, Management Science, **31**, 1985, 200-206.

[10] R. F. Love and J. G. Morris, *Modelling inter-city road distances by mathematical functions*, Operational Research Quarterly, **23**, 1972, 61-71.

[11] 奥野忠一他, 続多変量解析法, 日科技連, 1976.

[12] 杉原敏夫, 藤田渉, 多変量解析, 牧野書店, 1998.

[13] 刀根薫, ゲーム感覚意思決定法 — AHP 入門, 日科技連, 1995.